théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que tous ses mineurs principaux soient non-nuls. Alors il existe un unique couple (L, U) de matrices respectivement triangulaire inférieur avec des 1 sur la diagonales et triangulaire supérieur telles que $A = LU$.*

Démonstration. *On va effecuter la méthode du pivot de Gauss sans permutations. Supposons donc que tous les pivots naturels de A soient non-nuls. On construit par recurrence une suite de matrices (A_k) en posant $A_0 = A,\ A_{k+1} = E_k A_k$ avec*

$$E_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & -l_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

où $l_{i,k} = \frac{a_{i,k}^{(k)}}{a_{k,k}^{(k)}}$. On pose alors $U = A_n$ et $L = E_1^{-1} ... E_{n-1}^{-1}$. Par définition U est triangulaire supérieur et $A = LU$. Il reste à voire que L est triangulaire inférieur avec des 1 sur la diagonale. On calcule

$$E_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & & \\ \vdots & & 1 & & & \\ \vdots & & l_{k+1,k} & 1 & & \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & l_{n,k} & & & 1 \end{pmatrix}$$

et donc

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n,1} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Montrons maintenant que les pivots naturels sont non nuls par recurrence forte sur $1 \leq k \leq n$. $a_{1,1} = \Delta_1 \neq 0$ par hypothèse. Supposons que que $a_{1,1}, ..., a_{k-1,k-1}^{(}k-1) \neq 0$. On a donc pu calculer A_k. On ecrit alors $E_1^{-1} ... E_{k-1}^{-1} A_k = A$ sous la forme

$$\begin{pmatrix} L_{1,1} & 0 \\ L_{1,2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_k & A_{2,1}^{(k)} \\ 0 & A_{2,2}^{(k)} \end{pmatrix} = \left((\begin{matrix} A_k & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{matrix} \right)$$

où U_k est triangulaire supérieur et $L_{1,1}$ est trinagulaire inférieur avec des 1 sur la diagonale. On a alors $L_{1,1} U_k = A_k$ et $det(A_k) \neq 0$ par hypothèse donc $U_k = L_{1,1}^{-1} A_k$ est inversible comme produit de matrices inversibles. $det(U_k) = \prod_{i=1}^k a_{i,i}^{(k)} \neq 0$ donc $a_{k,k}^{(k)} \neq 0$

Soient deux décompositions LU de A : $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$ donc $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1}$ Or $L_2^{-1} L_1$ est triangulaire inférieur et $U_2 U_1^{-1}$ est triangulaire supérieur donc elles sont diagonales, et comme la diagonale de $L_2^{-1} L_1$ est composé de 1, $L_2^{-1} L_1 = U_2 U_1^{-1} = I_n$.

théorème. *Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Il existe une unique matrice B triangulaire inférieur telle que tous ses éléments diagonaux soient positifs et $A = B^t B$*

Démonstration. *On veut applique la décomposition LU à A. Soit Φ le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est A. Alors $a_{i,j} = \Phi(e_i, e_j)$. A_k est alors la matrice de Φ restreint à $vect(e_1, ..., e_k)$.*

Comme Φ est un produit scalaire, A_k est inversible. On a alors $A = LU$. L,U comme énoncés dans le théorème précédent. On note $D = diag(\sqrt{u_{i,i}}$ qui est bien définit car $\prod_{i=1}^{k} u_{i,i} = \Delta_k > 0$. On pose $B = LD$ et $C = D^{-1}U$. $A = BC$. Comme $A =^t A$, ${}^tC^{-1}B =^t BC^{-1}$, ${}^tC^{-1}B$ est triangulaire inférieur et ${}^tBC^{-1}$ est triangulaire supérieur elles sont donc diagonale et comme B, C ont les même coefficients diagonaux, la diagonale de ${}^tC^{-1}B$ est composé de 1 donc ${}^tC^{-1}B =^t BC^{-1} = I_n$ donc $B =^t C$ d'ou la décomposition de Cholesky. Soient deux décomposition de Cholesky de A,$A = B^tB = C^tC$ donc $C^{-1}B =^t C^tB^{-1}$ donc il existe $D = iag(d_1, ..., d_n)$ telle que $C^{-1}B = D$ d'ou $A = B^tB = CD^{2t}C$. Comme C est inversible $D^2 = I_n$ donc $d_i = 1, -1$ Or tous les coefficients diagonaux d'une décomposition de Cholesky sont positifs donc $d_i = 1$, $B = C$.